43　ベクトルと平面図形（２）

359

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{s}{k}\left(k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{2t}{k}\left(\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

ここで，$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とすると，

$\frac{s}{k}+\frac{2t}{k}=1\ \left(\frac{s}{k}\geq 0,\ \frac{2t}{k}\geq 0\right)$ より，点 P は線分 A'B' 上の点である。

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ および $\angle\mathrm{AOB}$ を求めると，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$$
$$=1-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$$
$$=1-2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=1+2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$$

これと条件より，

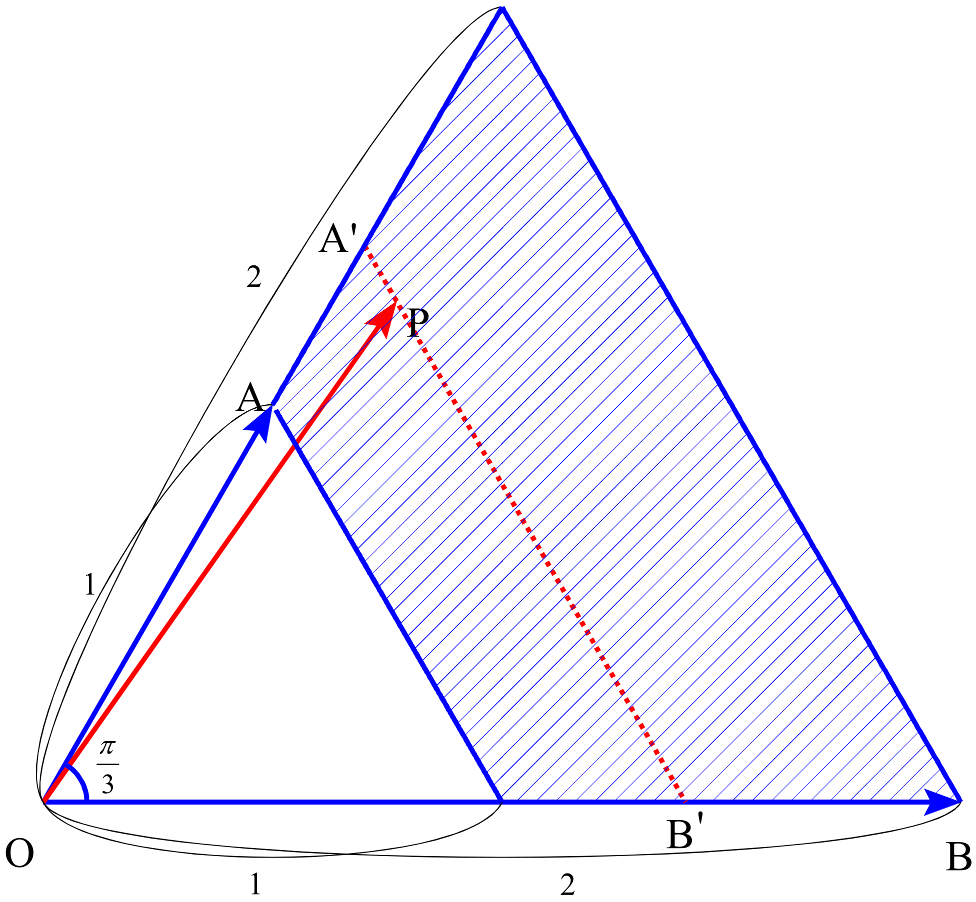
$$1-2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=3\quad\therefore -2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=2\quad\cdots①$$

$$1+2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=7\quad\therefore 2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=6\quad\cdots②$$

①，②より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=2$，$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$

よって，点 P の存在範囲は次図のようになる。
ゆえに，求める面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\cdot 2-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1\cdot 1$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$


A'
2
P
A
1
$\frac{\pi}{3}$
O
B'
B
1
2

360

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\beta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\cos\alpha\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\sin\beta\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-\cos\alpha+2\sin\beta\\2\cos\alpha+\sin\beta\end{pmatrix}$$

より，

$u=-\cos\alpha+2\sin\beta$，　$v=2\cos\alpha+\sin\beta$　　$\therefore -u+2v=5\cos\alpha$，　$2u+v=5\sin\beta$

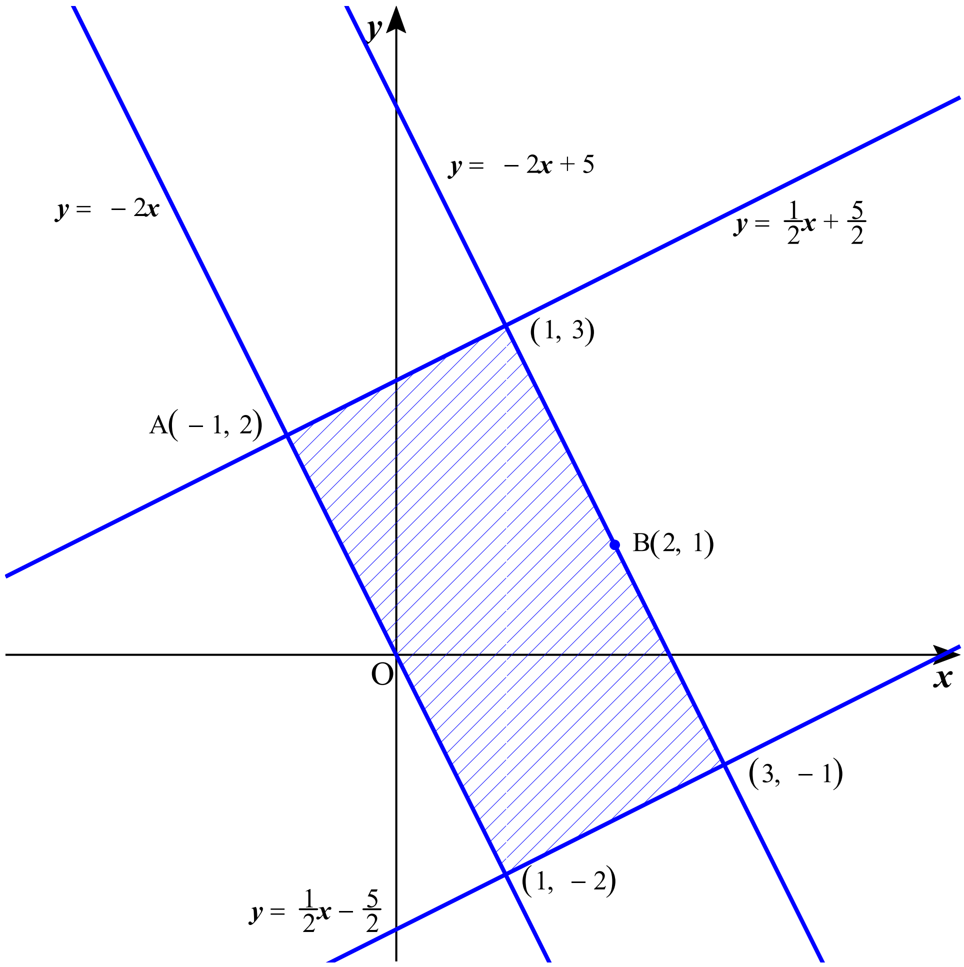
これと，　$0\le\alpha\le\pi$，　$0\le\beta\le\pi$ より，

点 $\mathrm{P}(u,\ v)$は $-5\le -u+2v\le 5$ かつ $0\le 2u+v\le 5$

すなわち $\dfrac{u}{2}-\dfrac{5}{2}\le v\le\dfrac{u}{2}+\dfrac{5}{2}$ かつ $-2u\le v\le -2u+5$ を満たす。

ゆえに，点 P は $\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{2}\le y\le\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}$ かつ $-2x\le y\le -2x+5$ を満たす領域に存在し，

これを図示すると，下図斜線部（境界線を含む）となる。



361

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\cos\theta\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(1-\sin\theta)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2\cos\theta-\sin\theta+1\\\cos\theta+2\sin\theta-2\end{pmatrix}$$

ここで，点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ より，

$(x,\ y)=(2\cos\theta-\sin\theta+1,\ \cos\theta+2\sin\theta-2)$

よって，$(x-1,\ y+2)=(2\cos\theta-\sin\theta,\ \cos\theta+2\sin\theta)$ より，

$(x-1)^2+(y+2)^2=(2\cos\theta-\sin\theta)^2+(\cos\theta+2\sin\theta)^2$

すなわち $(x-1)^2+(y+2)^2=5$　・・・①

逆に，①より，$\mathrm{P}\left(1+\sqrt{5}\cos\alpha,\ -2+\sqrt{5}\sin\alpha\right)$

一方，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}2\cos\theta-\sin\theta+1\\\cos\theta+2\sin\theta-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\cos(\theta+\beta)\\-2+\sin(\theta+\beta)\end{pmatrix}\left(\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\beta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

よって，逆も成り立つ。

ゆえに，点 P の軌跡は $(x-1)^2+(y+2)^2=5$

(2)

解法 1

(1)より，円 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ の周上の点が P で，点 B はその中心である。

よって，点 B を挟んで A，B，P が同一直線上に並ぶとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は最大となり，その値は，

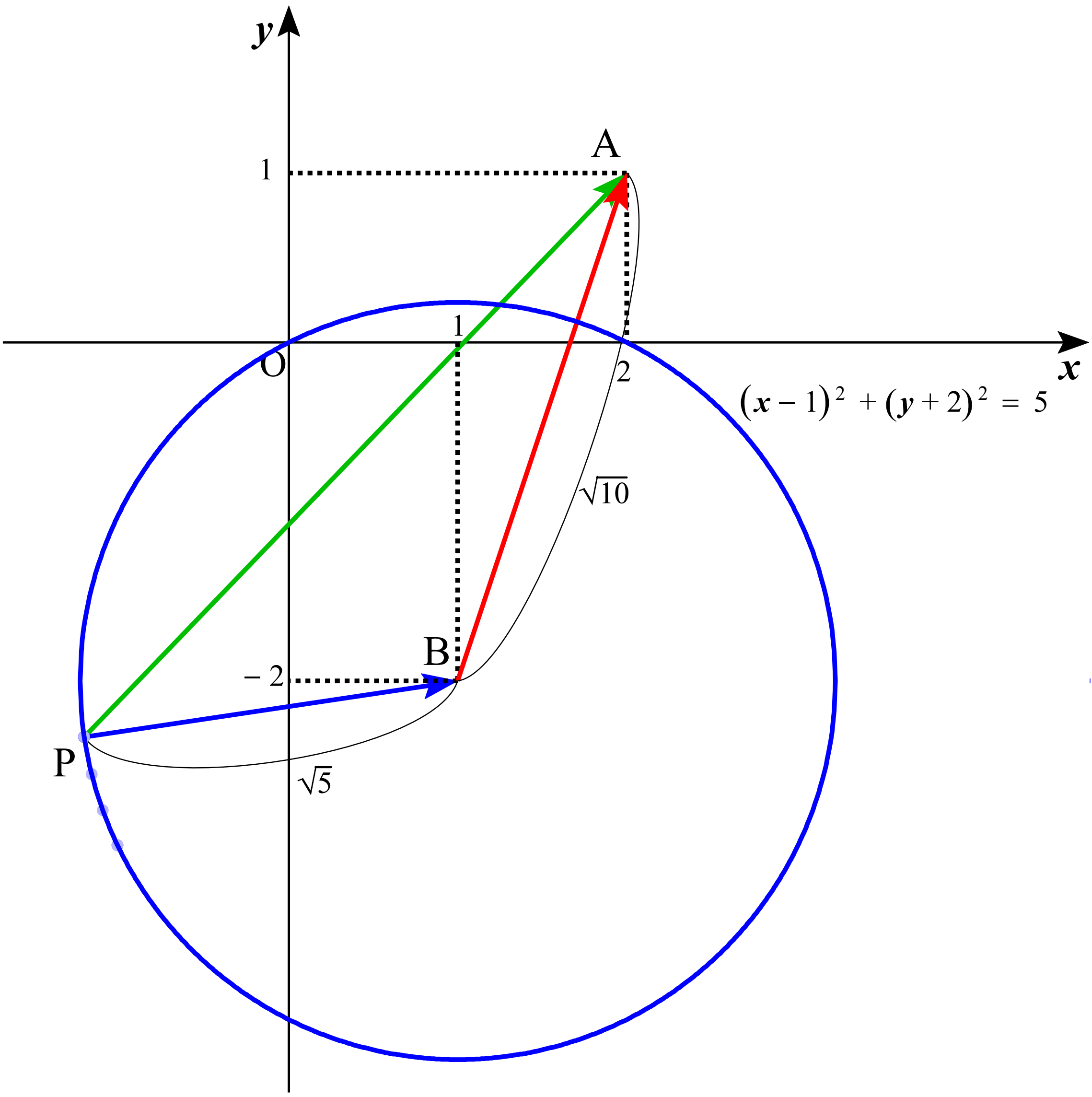
$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|$$
$$=\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\right)\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|$$
$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|$$
$$=5+5\sqrt{2}$$

また，このときの θ の値は，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=k\overrightarrow{\mathrm{BA}}\ (k>0)$ より，$\begin{pmatrix}-2\cos\theta+\sin\theta\\-\cos\theta-2\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\3k\end{pmatrix}$ だから，

$3(-2\cos\theta+\sin\theta)=-\cos\theta-2\sin\theta$ すなわち $5\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

これと，$-2\cos\theta+\sin\theta>0$ かつ $-\cos\theta-2\sin\theta>0$ より，$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は，$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$ で最大値 $5+5\sqrt{2}$ をとる。



解法 2

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}2\cos\theta-\sin\theta+1\\ \cos\theta+2\sin\theta-2\end{pmatrix}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\begin{pmatrix}-2\cos\theta+\sin\theta+1\\ -\cos\theta-2\sin\theta+3\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\begin{pmatrix}-2\cos\theta+\sin\theta\\ -\cos\theta-2\sin\theta\end{pmatrix}$

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=(-2\cos\theta+\sin\theta+1)(-2\cos\theta+\sin\theta)+(-\cos\theta-2\sin\theta+3)(-\cos\theta-2\sin\theta)\\&=(-2\cos\theta+\sin\theta)^2+(-2\cos\theta+\sin\theta)+(-\cos\theta-2\sin\theta)^2+3(-\cos\theta-2\sin\theta)\\&=5-5(\sin\theta+\cos\theta)\\&=5-5\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は，$\theta=\frac{5}{4}\pi$ で最大値 $5+5\sqrt{2}$ をとる。

362

(1)

（ア）

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \neq \vec{0}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ すなわち $\vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ $\quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{p} = |\vec{a}|^2$

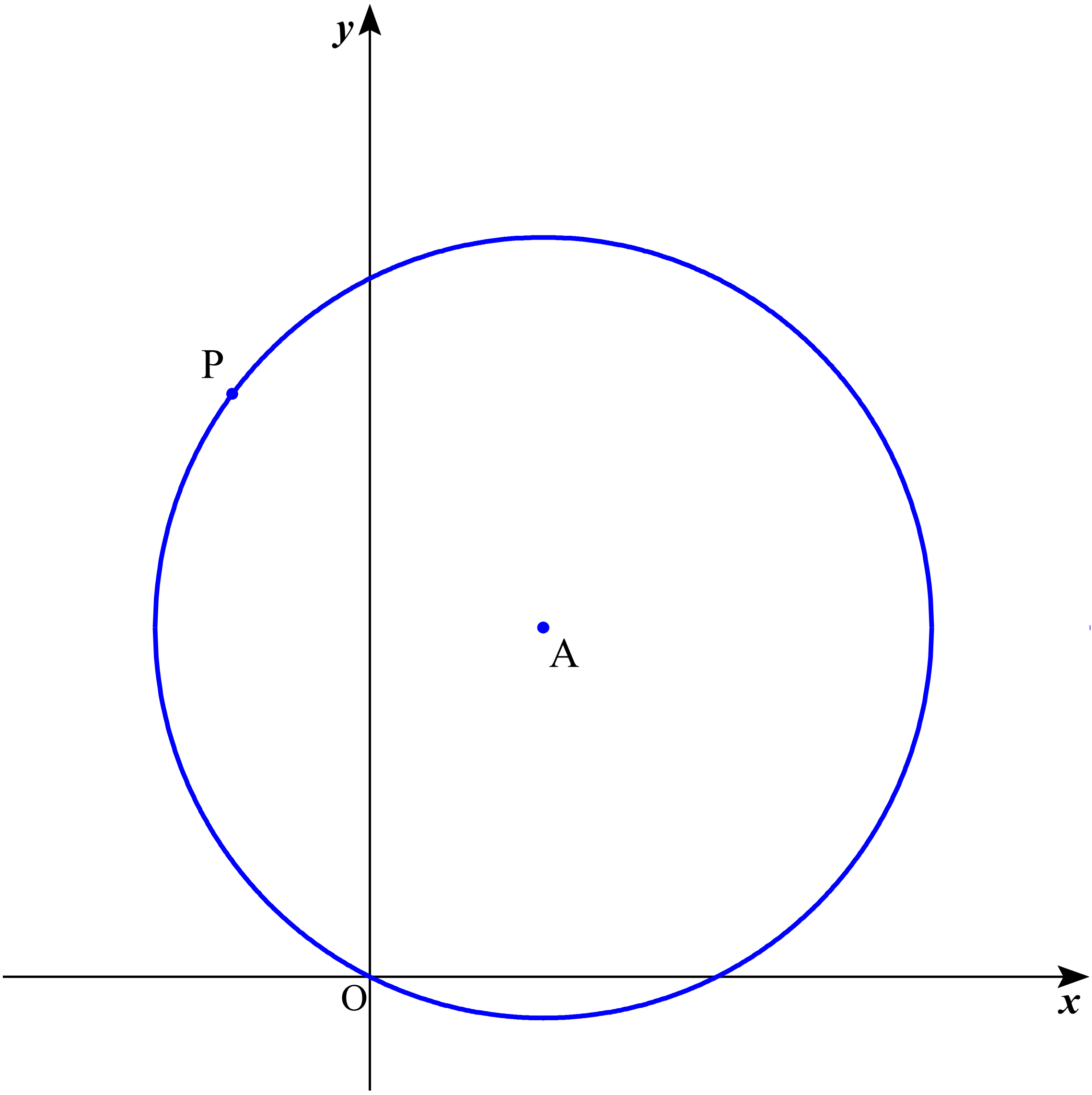
（イ）

解法 1

$|\vec{p}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$ より，$|\vec{p}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{p} + |\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2$

よって，$|\vec{p} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2$

ゆえに，動点 P の軌跡は点 A を中心とする半径 $|\vec{a}|$ の円である。

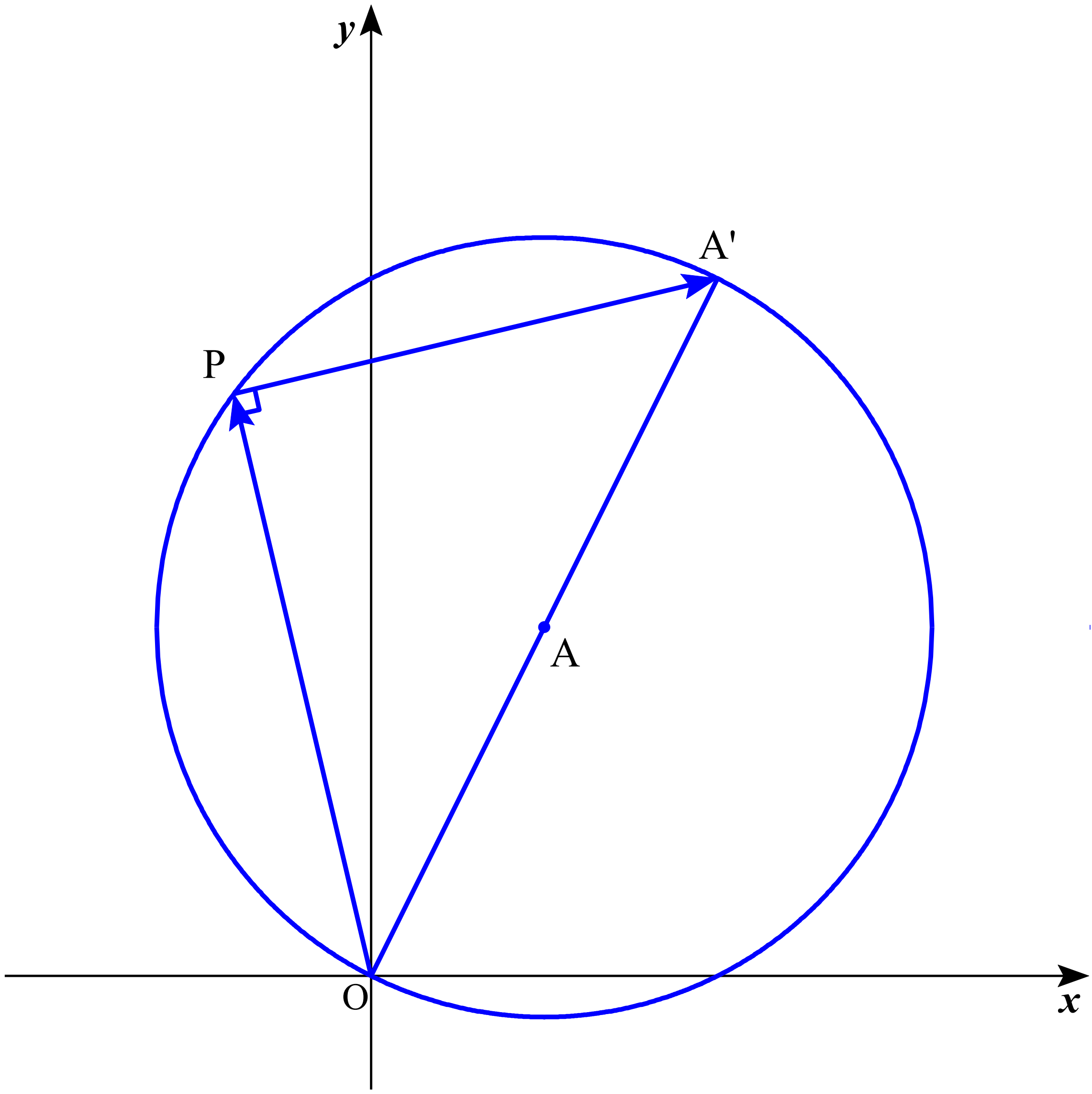


解法 2

$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{p}\cdot(\vec{p}-2\vec{a})$ より，$-\vec{p}\cdot(2\vec{a}-\vec{p})=0$

よって，$\mathrm{A'}(2\vec{a})$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA'}}=0$　すなわち $\angle\mathrm{OP}(\vec{p})\mathrm{A'}(2\vec{a})=90°$

ゆえに，動点 P の軌跡は点 A を中心とする半径 $|\vec{a}|$ の円である。



(2)

$\left|\vec{p}-\vec{b}\right| \leq \left|\vec{p}+3\vec{b}\right| \leq 3\left|\vec{p}-\vec{b}\right|$ より，$\left|\vec{p}-\vec{b}\right|^2 \leq \left|\vec{p}+3\vec{b}\right|^2 \leq 9\left|\vec{p}-\vec{b}\right|^2$

ここで，$\vec{p}=(x,\ y)$ とおくと，$\left|\vec{p}-\vec{b}\right|^2=(x-1)^2+(y-1)^2$，$\left|\vec{p}+3\vec{b}\right|^2=(x+3)^2+(y+3)^2$ より，

$(x-1)^2+(y-1)^2 \leq (x+3)^2+(y+3)^2 \leq 9\left\{(x-1)^2+(y-1)^2\right\}$

すなわち

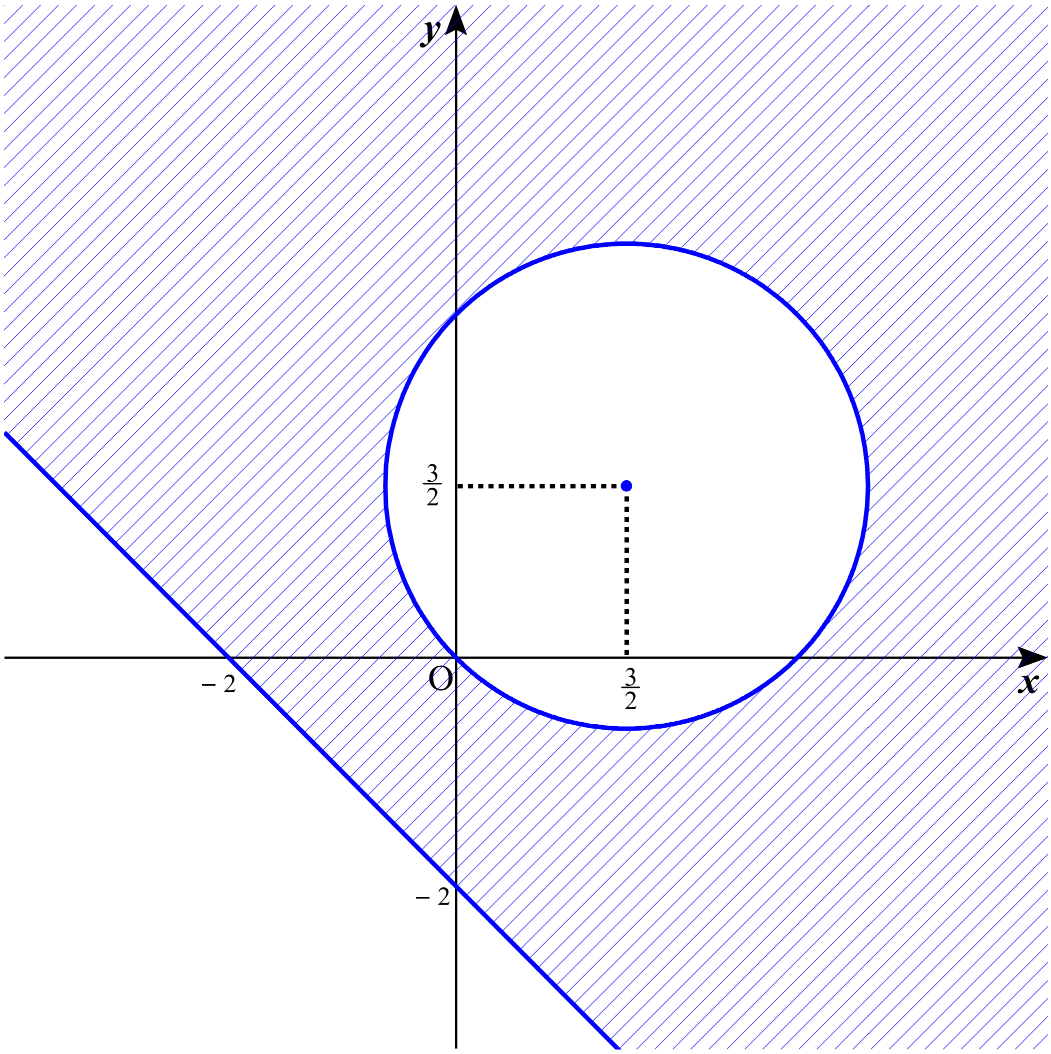
$(x-1)^2+(y-1)^2 \leq (x+3)^2+(y+3)^2$　・・・①　かつ

$(x+3)^2+(y+3)^2 \leq 9\left\{(x-1)^2+(y-1)^2\right\}$　・・・②

①より，$y \geq -x-2$　・・・③

②より，$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{2}$　・・・④

よって，点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ 全体が表す領域は，③かつ④より，下図斜線部（境界線を含む）である。



363

(1)

$\mathrm{A}\left(a,\ a^2\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ b^2\right)$とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t$ すなわち $ab+a^2b^2=t$ より，$t=\left(ab+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$ $\therefore t\geq -\dfrac{1}{4}$

(2)

$\mathrm{P}(x,\ y)$とし，A と B は，(1)と同様，$\mathrm{A}\left(a,\ a^2\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ b^2\right)$とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b \\ a^2+b^2 \end{pmatrix}$

これと，$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ より，$y=x^2-2ab$ ・・・①

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$ すなわち $ab+a^2b^2=2$ より，$(ab+2)(ab-1)=0$ $\therefore ab=-2,\ 1$

$ab=-2$ のとき

$a+b=x$ より，$a,\ b$ は u の方程式 $u^2-xu-2=0$ の実数解であるから，

判別式を D とすると $D\geq 0$ これと $D=x^2+8$ より，x は任意の実数

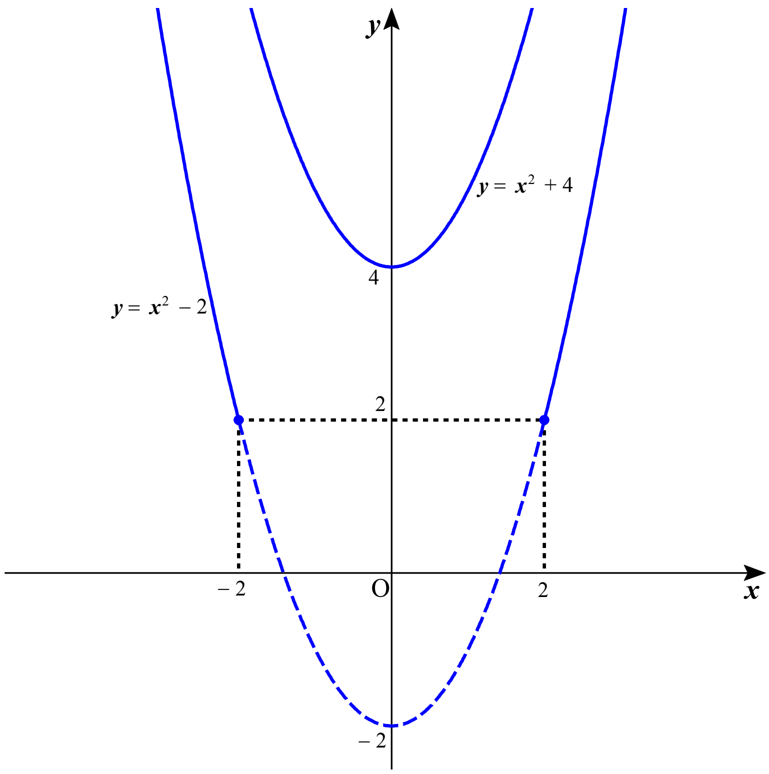
よって，①は，$y=x^2+4$ （x は任意の実数）

$ab=1$ のとき

上と同様にして x の値の範囲を求めると，$D=x^2-4\geq 0$ より，$x\leq -2,\ 2\leq x$

よって，①は，$y=x^2-2$ （$x\leq -2,\ 2\leq x$）

以上より，点 P の軌跡は下図実線



364

(1)

解法 **1**

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ より，

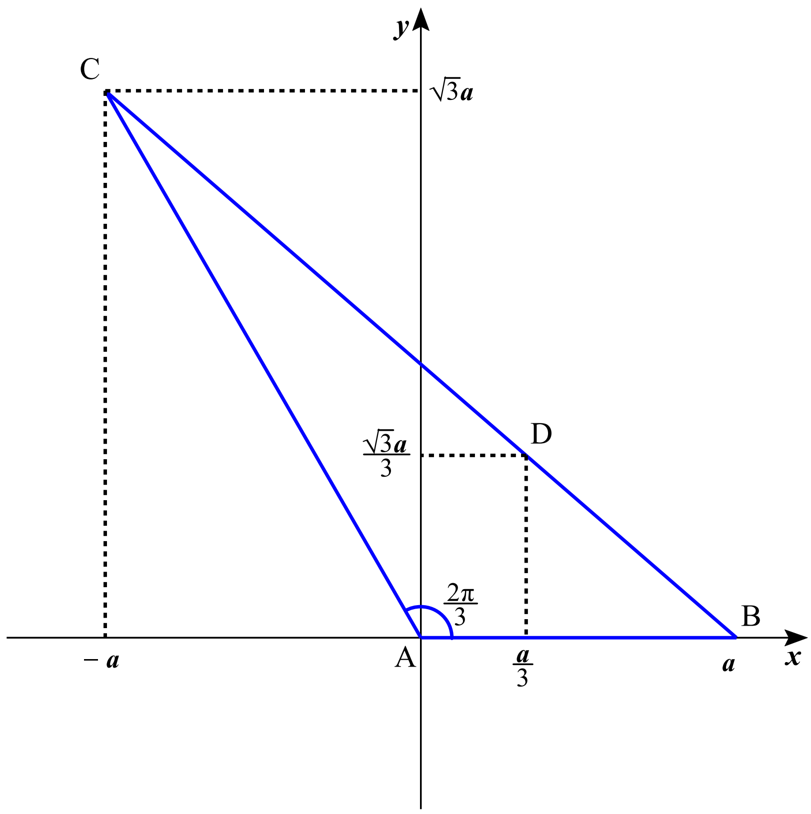
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2=\frac{1}{9}\left|2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$
$$=\frac{1}{9}\left(4\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+4\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\right)$$
$$=\frac{1}{9}\left(4\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+4\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\frac{2}{3}\pi+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\right)$$
$$=\frac{4}{9}a^2$$

$$\therefore\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\frac{2}{3}a$$

解法 **2**

$\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(a,\ 0)$ とすると，$\mathrm{C}\left(2a\cos\frac{2}{3}\pi,\ 2a\sin\frac{2}{3}\pi\right)=\left(-a,\ \sqrt{3}a\right)$

よって，$\mathrm{D}\left(\frac{2a-a}{3},\ \frac{\sqrt{3}a}{3}\right)=\left(\frac{a}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$　$\therefore\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+3a^2}=\frac{2}{3}a$



(2)

条件および

$$2\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)-\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$
$$=-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$$
$$=-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-3\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=a$

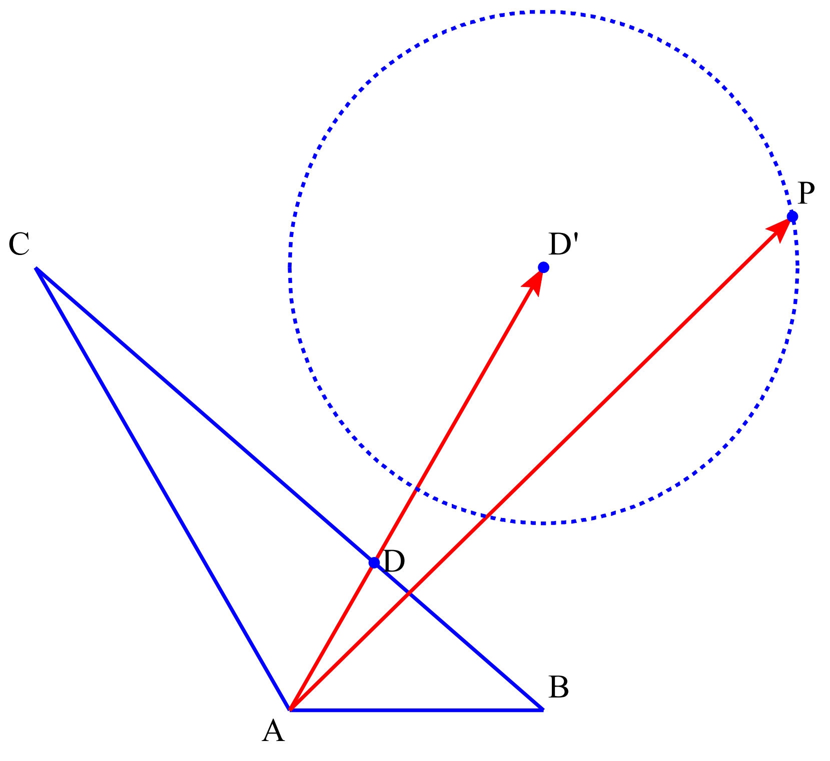
ここで，$3\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD'}}$ とおくと，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-3\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AD'}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{D'P}}\right|$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{D'P}}\right|=a$

よって，動点 P の軌跡は D' を中心とする半径 a の円である。

ゆえに，点 D' を挟んで A， D'，P が一直線上に並ぶとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$ は最大となり，

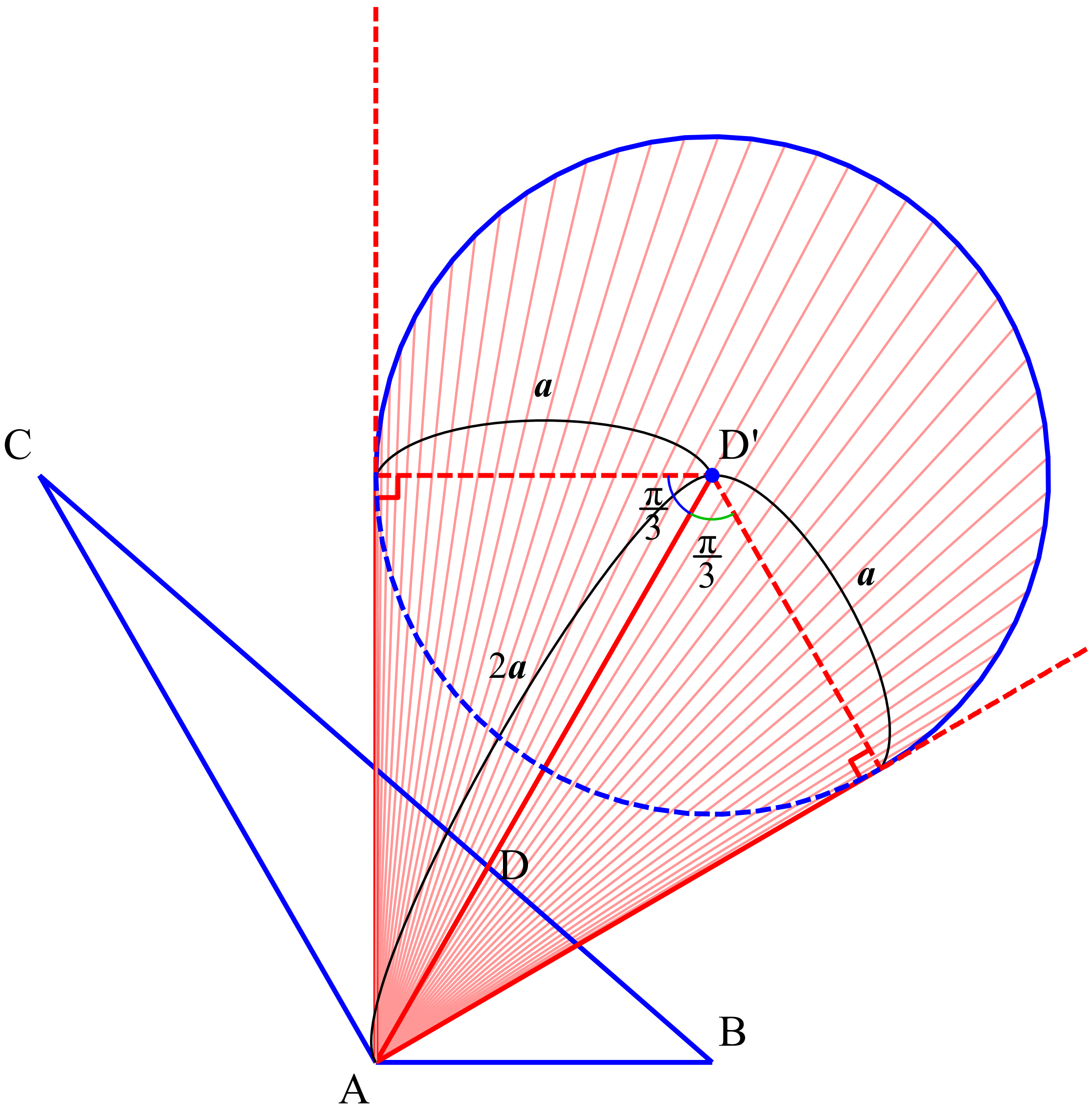
その値は $\left|\overrightarrow{\mathrm{AD'}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{D'P}}\right|=3\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{D'P}}\right|=3\cdot\frac{2}{3}a+a=3a$



(3)

下図斜線部（境界線を含む）の面積を求めればよいから，

求める面積は$2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi a^2=\left(\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\right)a^2$



365

点 P は辺 AB を s ： $1-s$ に，点 Q は点 BC を t ： $1-t$ に，点 R は辺 AC を u ： $1-u$ に内分する点とする。ただし，条件より， $0<s,\ t,\ u<1$

また，△PQR の重心を G とする。

すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}}{3}$$

$$=\frac{s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}+u\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$$

$$=\frac{s+1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{t}{3}\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)+\frac{u}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

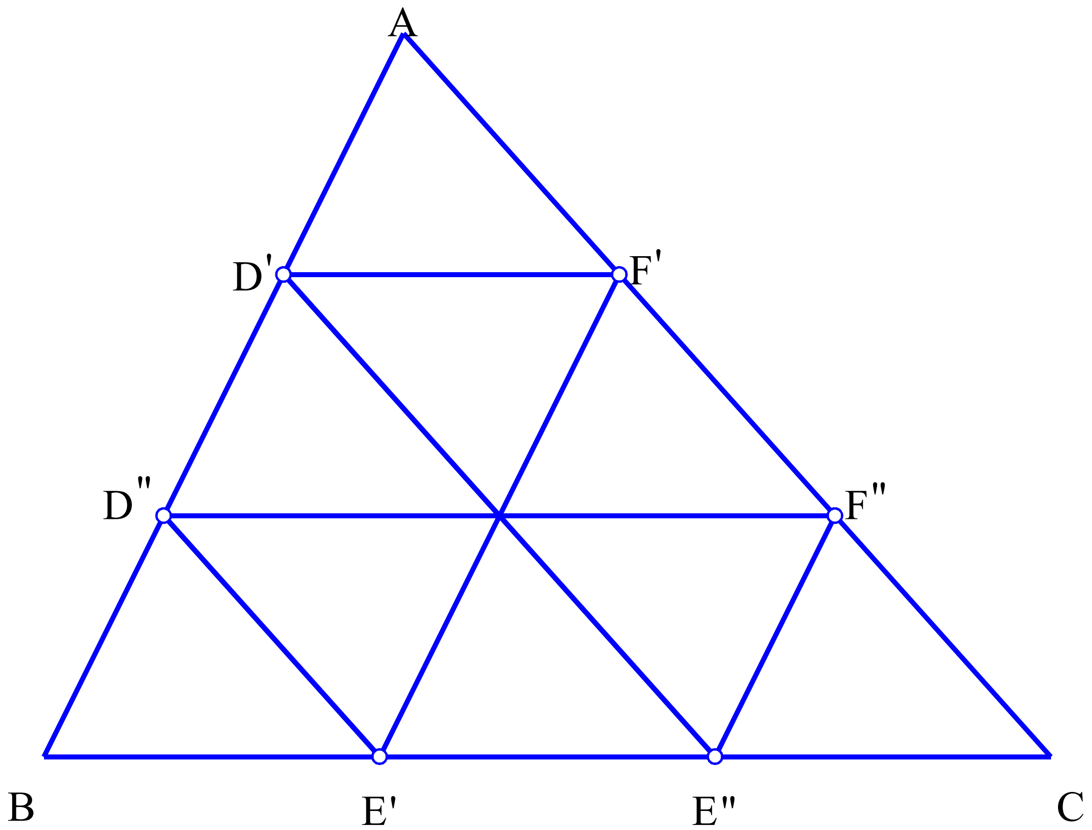
$$=\frac{s+1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{t}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\frac{u}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって， $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{s+1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{t}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\frac{u}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　・・・①

ただし， $\frac{1}{3}<\frac{s+1}{3}<\frac{2}{3}$， $0<\frac{t}{3}<\frac{1}{3}$， $0<\frac{u}{3}<\frac{1}{3}$　・・・②

ここで，△ABC のそれぞれの辺の 3 等分点 D',D",E',E",F',F" をとり，

2 点を各辺と平行になるように線分で結ぶと，下図となる。



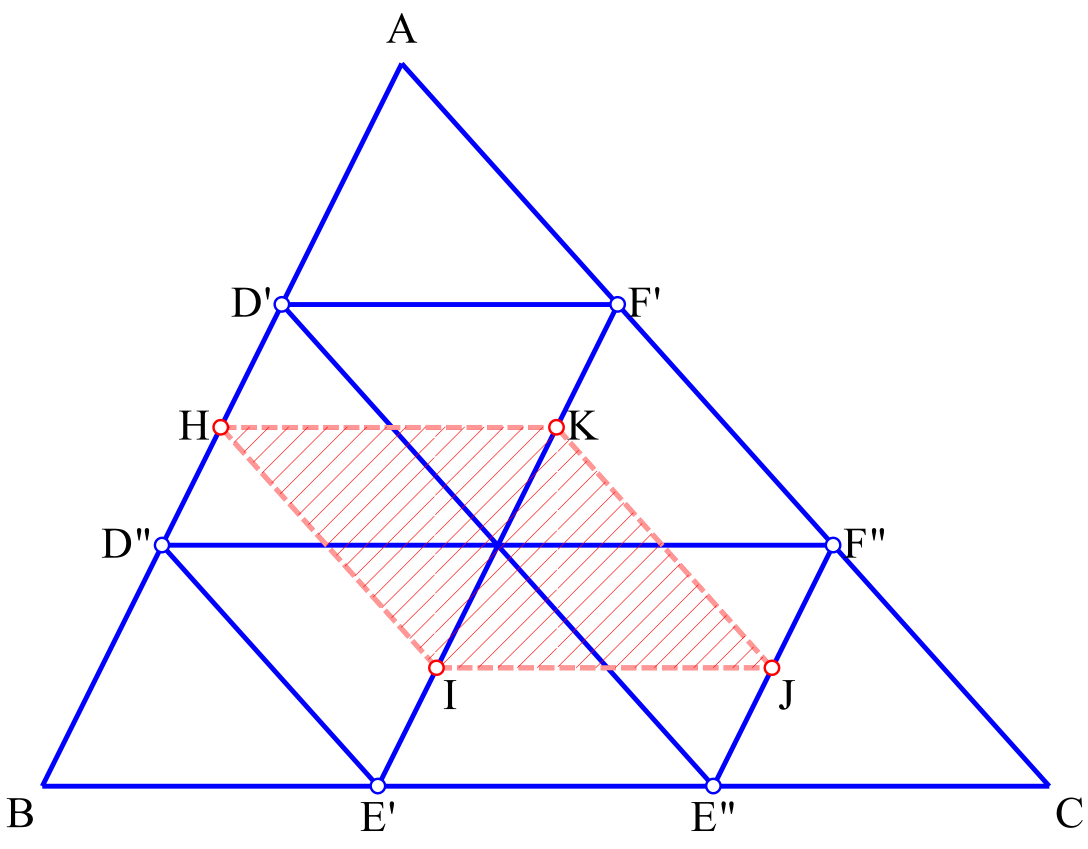
$\dfrac{s+1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ とすると，点 H の存在範囲は，②より，D' と D" を除く線分 D'D" 上である。

また，①の $\dfrac{t}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\dfrac{u}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の部分が表す領域は，

s, t, u は互いに独立に値をとることができることから，
②より， D'F' と平行で長さが等しい 2 辺と F'F" と平行で長さが等しい 2 辺からなる平行四辺形の周を含まない内部である。

よって，点 H がある位置にあるとき， $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\dfrac{t}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\dfrac{u}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が表す領域は

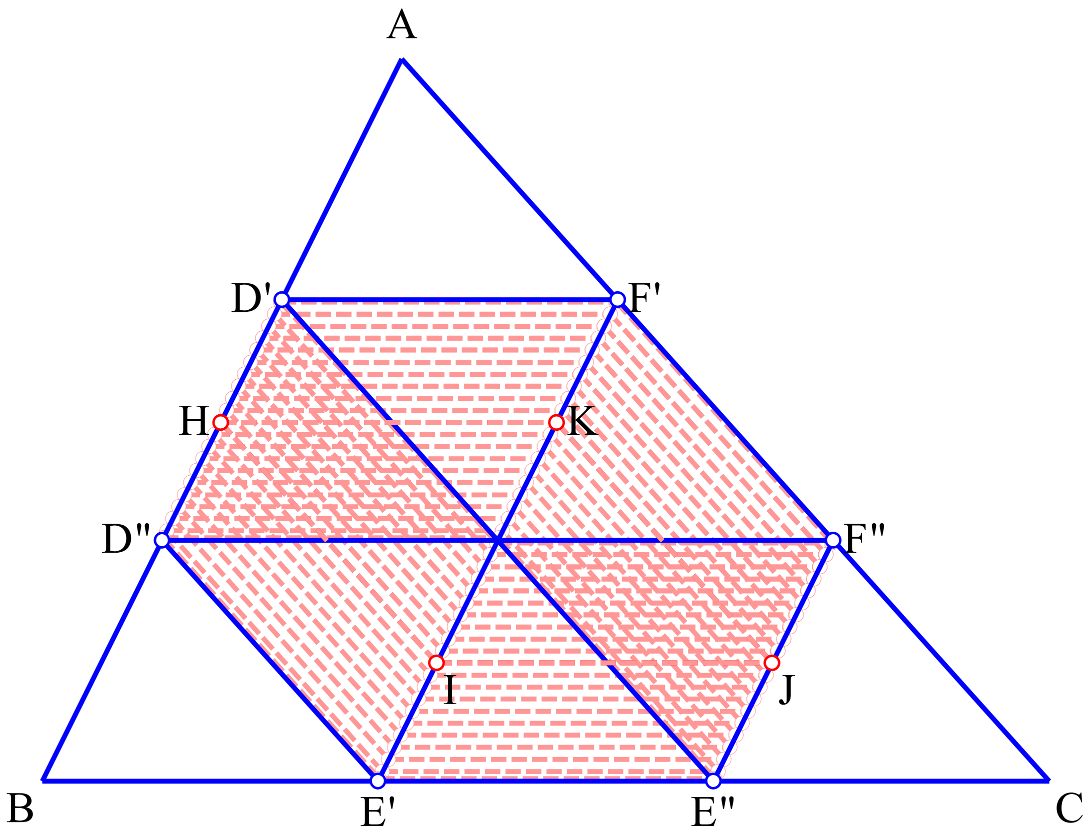
下図の平行四辺形 HIJK の周（破線部）を含まない内部（赤色斜線部）である。



また，

点 H を限りなく点D'に近づけると，HK と KJ はそれぞれD'F' と F'F"に限りなく近づく。

点 H を限りなく点D'に近づけると，HI と IJ はそれぞれD"E' と E'E"に限りなく近づく。



よって，重心 G が動く範囲は六角形 D'D"E'E"F"F' の周を含まない内部である。